ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN NGA

PHƯƠNG PHÁP LẶP ISHIKAWA CHO MỘT HỌ VÔ HẠN CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN NGA

PHƯƠNG PHÁP LẶP ISHIKAWA CHO MỘT HỌ VÔ HẠN CÁC ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Nguyễn Bường

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
I	toán tử đồng nhất
$l^p,\ 1 \leq p < \infty$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
l_∞	không gian các dãy số bị chặn
$L^p[a,b],\ 1 \leq p < \infty$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

Mở đầu

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lồi: "Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i\in I}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach E". Bài toán này có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như: Xử lí ảnh, khôi phục tín hiệu, vật lý, y học,...

Khi $C = \mathrm{Fix}(T)$, tập điểm bất động của ánh xạ không giãn T, thì đã có nhiều phương pháp được đề xuất dựa trên các phương pháp lặp cổ điển nổi tiếng. Đó là phương pháp lặp Mann [2], Ishikawa [5], Halpern [4], phương pháp xấp xỉ mềm [6]. Nhìn chung, các phương pháp chỉ có sự hội tụ yếu. Ví dụ, S. Reich chỉ ra rằng nếu không gian Banach E là lồi đều và có chuẩn khả vi Fréchet và nếu dãy $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$ thì dãy $\{x_n\}$ được tạo ra từ phương pháp Mann hội tụ yếu đến một phần tử của $\mathrm{Fix}(T)$. Vì vậy, rất nhiều tác giả đã cải tiến phương pháp Mann và Ishikawa để có được sự hội tụ mạnh cho các ánh xạ không giãn. Cho đến nay đã có nhiều phương pháp được đưa ra dựa trên sự cải biên của các phương pháp này cho các lớp bài toán liên quan.

Mục tiêu của đề tài luận văn là tìm hiểu và trình bày lại một cải tiến của phương pháp lặp Ishikawa tìm điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Banach lồi chặt và trơn đều trong bài báo [8] công bố năm 2012.

Nội dung của đề tài luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Không gian Banach và điểm bất động

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Banach lồi chặt, trơn đều và một số tính chất. Phần thứ hai của chương giới thiệu về bài toán điểm bất động, trình bày một số phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn như phương pháp lặp Mann, phương pháp lặp Ishikawa cùng một số cải biên của phương pháp.

Chương 2. Phương pháp lặp Ishikawa tìm điểm bất động chung của họ ánh xạ không giãn

Trong chương này, luận văn tập trung trình bày chi tiết kết quả của bài báo [8] về một cải biên của phương pháp lặp Ishikawa tìm điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TS. Nguyễn Bường - Người đã tận tình hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu trường THPT Chuyên Bắc Ninh, Bắc Ninh và tập thể các thầy cô giáo trong tổ Toán-Tin của Trường đã tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong thời gian tác giả tham gia học cao học.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Văn Nga

Chương 1

Không gian Banach và điểm bất động

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về không gian Banach lồi chặt, trơn đều và một số tính chất. Phần thứ hai của chương giới thiệu về bài toán điểm bất động, trình bày một số phương pháp tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn như phương pháp lặp Mann, phương pháp lặp Ishikawa cùng một số cải biên của phương pháp. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1]-[8].

1.1 Không gian Banach và một số tính chất

1.1.1 Không gian Banach lồi, trơn

Cho E là một không gian Banach và E^* là không gian đối ngẫu của E. Để cho đơn giản và thuận tiện, ta sử dụng kí hiệu $\|.\|$ để chỉ chuẩn trên E và E^*.

Trong luận văn này, ta sử dụng tính chất dưới đây của không gian Banach phản xạ.

Mệnh đề 1.1.1 (xem [2], trang 41) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

(a) E là không gian phản xạ.

(b) Mọi dãy bị chặn trong E đều có một dãy con hội tụ yếu.

Sau đây là khái niệm và một số cấu trúc hình học các không gian Banach như: tính lồi, tính trơn, môđun lồi, môđun trơn.

Định nghĩa 1.1.2 Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in E, x \neq y$ mà $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ ta có

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Chú ý 1.1.3 Định nghĩa (1.1.2) còn có thể phát biểu dưới các dạng tương đương sau: Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu mọi $x, y \in S_E$ thỏa mãn $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| = 1$, suy ra $x = y$ hoặc với mọi $x, y \in S_E$ và $x \neq y$ ta có $\|tx + (1-t)y\| < 1$ với mọi $t \in (0,1)$, trong đó

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Định nghĩa 1.1.4 Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E$ mà $\|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon$ ta luôn có

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Dễ thấy rằng nếu E là một không gian Banach lồi đều thì nó là không gian Banach lồi chặt. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng.

Để đo tính lồi của không gian Banach E, người ta đưa vào khái niệm mô đun lồi của không gian Banach E:

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Nhận xét 1.1.5 Mô đun lồi của không gian Banach E là hàm số xác định, liên tục và tăng trên đoạn $[0; 2]$. Không gian Banach E lồi chặt khi và chỉ khi $\delta_E(2) = 1$. Ngoài ra, không gian Banach E là lồi đều khi và chỉ khi $\delta_E(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0$.

Mệnh đề 1.1.6 (xem [1]) *Mọi không gian Banach lồi đều bất kì là không gian phản xạ.*

Định nghĩa 1.1.7 Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn. Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux tại điểm $x \in S_E$ nếu với mỗi $y \in S_E$, tồn tại giới hạn

$$\frac{d}{dt}(\|x + ty\|)_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}. \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.1.8 Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn. Khi đó:

(a) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux nếu nó khả vi Gâteaux tại moi $x \in S_E$.

(b) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với moi $y \in S_E$ giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x \in S_E$.

(c) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Fréchet nếu với moi $x \in S_E$ giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $y \in S_E$.

(d) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Fréchet đều nếu giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x, y \in S_E$.

Định lý 1.1.9 (xem [2]) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

(a) Nếu E^* là không gian lồi chặt thì E là không gian trơn.

(b) Nếu E^* là không gian trơn thì E là không gian lồi chặt.

Định nghĩa 1.1.10 Mô đun trơn của không gian Banach E là hàm số xác định bởi

$$\rho_E(\tau) = \sup\{2^{-1}(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = \tau\}.$$

Nhận xét 1.1.11 Mô đun trơn của không gian Banach E là hàm số xác định, liên tục và tăng trên khoảng $[0; +\infty)$.

Định lý dưới đây cho ta biết về mối liên hệ giữa mô đun của không gian Banach E với mô đun lồi của E^* và ngược lại.

Định lý 1.1.12 (xem [2]) *Cho E là môt không gian Banach. Khi đó ta có*

(a) $\rho_{E^*}(\tau) = \sup\left\{\dfrac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon) : \varepsilon \in [0, 2]\right\},\ \tau > 0.$

(b) $\rho_E(\tau) = \sup\left\{\dfrac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X^*(\varepsilon) : \varepsilon \in [0, 2]\right\},\ \tau > 0.$

Nhận xét 1.1.13 Từ Định lý 1.1.12, suy ra

$$\rho_0(E) = \frac{\varepsilon_0(E^*)}{2} \quad \text{và} \quad \rho_0(E^*) = \frac{\varepsilon_0(E)}{2},$$

trong đó $\varepsilon_0(E) = \sup\{\varepsilon : \delta_E(\varepsilon) = 0\},\ \rho_0(E) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau}$.

Định nghĩa 1.1.14 Không gian Banach E được gọi là trơn đều nếu

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau} = 0.$$

Từ Nhận xét 1.1.13, ta có định lý dưới đây.

Định lý 1.1.15 (xem [2]) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(a) Nếu E là không gian trơn đều thì E^* là không gian lồi đều.

(b) Nếu E là không gian lồi đều thì E^* là không gian trơn đều.

1.1.2 Ánh xạ đơn điệu trong không gian Banach

Định nghĩa 1.1.16 Ánh xạ $J : E \to 2^{E^*}$ (nói chung là đa trị) xác định bởi

$$Jx = \{u \in E^* : \langle x, u \rangle = \|x\|\|u\|, \|u\| = \|x\|\},$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach E.

Ví dụ 1.1.17 Trong không gian Hilbert H, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là ánh xạ đơn vị I.

Định nghĩa 1.1.18 Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : E \to 2^{E^*}$ của không gian Banach E được gọi là

(i) liên tục yếu theo dãy nếu J đơn trị và với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu đến x thì Jx_n hội tụ yếu đến Jx theo tôpô yếu* trong E^*.

(ii) liên tục mạnh-yếu theo dãy nếu J đơn trị và với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x thì Jx_n hội tụ yếu đến Jx theo tôpô yếu* trong E^*.

Nhận xét 1.1.19 Không gian $l^p, 1 < p < \infty$ có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy. Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trong không gian $L^p[a, b], 1 < p < \infty$ không thỏa mãn tính chất này.

Tính đơn trị của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc có mối liên hệ với tính khả vi của chuẩn của không gian Banach như khẳng định trong các định lý sau đây.

Định lý 1.1.20 (xem [2]) *Cho E là không gian Banach với ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $J : E \to 2^{E^*}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*